



University of the Pacific Scholarly Commons

Euler Archive - All Works

Euler Archive

1781

De problemate quodam mechanico, satis obvio, at solutu difficillimo

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De problemate quodam mechanico, satis obvio, at solutu difficillimo" (1781). *Euler Archive - All Works*. 517.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/517>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE PROBLEMATÉ
QVODAM
MECHANICO,
SATIS OBVIO,
AT SOLVTV DIFFICILLIMO.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Consideranti mihi hunc versum Virgilii saepius occurrentem :

Anchora de prora iacitur, stant littore puppes.
obtulit se ista quaestio: quomodo naus, postquam anchora de prora fuerit iacta, motum suum sit prosecutura; vbi quidem euident est, proram alium motum recipere non posse, praeter circula rem circa anchoram. At vero tota naus interea circa proram motu quodam rotatorio fertur, quem autem tam ob ipsam resistentiam aquae, quam ob eius continuam mutationem, nullo modo per principia mechanica determinare licet.

§. 2.

§. 2. Remotis autem his impedimentis quaestio ad hanc formam simplicissimam redigatur :

Si corpus quodcunque B C D, plano horizontali poli-Tab III. vissimo incumbens, (ut omnis frictio remoueat) de Fig. 2. puncto B, ope fili B A in puncto A, fixum retineatur, eique motus quicunque imprimatur, inuestigare motum, quo istud corpus deinceps est progressurum.

Tentamen Solutionis.

§. 3. Sit massa corporis propositi $B C D = M$, eiusque centrum grauitatis sit in C , momentum vero inertiae, respectu axis verticalis puncto C insistentis, ponatur $= M k k$; longitudo fili sit $A B = a$ et interuallum $B C = b$. Per punctum A iam ducatur recta fixa $A E = e$, ad quam motus corporis quouis tempore referatur, atque elapso tempore $= t$ teneat corpus cum filo situm in figura expressum, ponaturque primo angulus $E A B = \Phi$, et, producta recta $C B$ vsque ad rectam $A E$ in L , vocetur angulus $E L B = \Psi$; ita vt tota quaestio eo reducatur, vt ad quoduis tempus t isti bini anguli Φ et Ψ determinentur. Ponatur autem quoque breu. gr. differentia horum angulorum $\Psi - \Phi = A B L = \omega$.

§. 4. His factis denominationibus determinationem motus aggrediamur; et quia corpus nullas alias vires sollicitantes sustinet, praeter tensionem fili $A B$, ponamus istam tensionem pro hoc tempore $= T$, ita vt corpus in puncto B vi ista T in directione $B A$ sollicitetur. Nunc vt prima principia Mechanicae applicare queamus, pro motu corporis progressiuo ex centro C ad axem $A E$ ducatur

ducatur normalis CX et vocentur binae coordinatae
 $AX = x$ et $XC = y$, tumque ex figura erit

$$x = a \cos. \Phi + b \cos. \Psi \text{ et } y = a \sin. \Phi + b \sin. \Psi,$$

vnde differentiando colligimus

$$dx = -a d\Phi \sin. \Phi - b d\Psi \sin. \Psi$$

$$dy = +a d\Phi \cos. \Phi + b d\Psi \cos. \Psi$$

$$ddx = -a dd\Phi \sin. \Phi - a d\Phi^2 \cos. \Phi - b dd\Psi \sin. \Psi - b d\Psi^2 \cos. \Psi$$

$$ddy = +a dd\Phi \cos. \Phi - a d\Phi^2 \sin. \Phi - b dd\Psi \cos. \Psi - b d\Psi^2 \sin. \Psi$$

§. 5. Hinc iam ad motum centri grauitatis C definiendum ei tensio fili T immediate applicata concipitur, quae secundum directiones coordinatarum resoluta dabit pro directione XA vim $= T \cos. \Phi$ et pro directione CX vim $= T \sin. \Phi$, vnde principia motus has duas aequationes suppeditant:

$$\frac{ddx}{\alpha dt^2} = -\frac{T \cos. \Phi}{M} \text{ et } \frac{ddy}{\alpha dt^2} = -\frac{T \sin. \Phi}{M},$$

vbi elementum temporis dt constans est assumtum, et α denotat celeritatem lapsu libero grauium per vnum minutum secundum acquisitam, siquidem tempora in minutis secundis, celeritates vero per spatia, vno minuto secundo percurfa, exprimere velimus.

§. 6. Quoniam autem tensio fili T penitus est incognita, vt eam eliminemus primam aequationem ducamus in $\sin. \Phi$ secundam vero in $\cos. \Phi$ atque differentia dabit: $ddx \sin. \Phi - ddy \cos. \Phi = 0$, quae aequatio loco ddx et ddy substitutis valoribus modo ante traditis, induet hanc formam satis simplicem, ob $\Psi - \Phi = \omega$; scilicet:

$$a dd\Phi + b dd\Psi \cos. \omega - b d\Psi^2 \sin. \omega = 0.$$

Simili

Simili modo primae aequationis, ductae in $\cos. \Phi$, et secundae in $\sin. \Phi$, summa dabit ipsam tensionis quantitatem

$$T = -M \frac{(d d x \cos. \Phi + d d y \sin. \Phi)}{\alpha d t^2},$$

unde facta substitutione erit:

$$\frac{T}{M} = \frac{a d \Phi^2 + b d d \psi \sin. \omega + b d \psi^2 \cos. \omega}{\alpha d t^2},$$

quam autem cognoscere non datur, antequam totus motus fuerit exploratus.

§. 7. Praeterea etiam plurimum iuuabit istam combinationem in usum vocare, dum prima per dx , altera vero per dy multiplicatur, ut horum productorum summa praebeat hanc aequalitatem:

$$\frac{d x d d x + d y d d y}{\alpha d t^2} = -\frac{T}{M} (d x \cos. \Phi + d y \sin. \Phi).$$

At vero est $d x \cos. \Phi + d y \sin. \Phi = -b d \psi \sin. \omega$, unde fit

$$\frac{d x d d x + d y d d y}{\alpha d t^2} = \frac{T}{M} b d \psi \sin. \omega,$$

quae aequatio ideo summum usum praestabit, quia membrum finistrum absolute integrari potest, cum eius integrale sit $\frac{d x^2 + d y^2}{2 \alpha d t^2}$, vbi notetur esse

$$d x^2 + d y^2 = a a d \Phi^2 + b b d \psi^2 + 2 a b d \Phi d \psi \cos. \omega.$$

§. 8. Expedito motu progressivo motum quoque gyratorium nostri corporis circa centrum gravitatis C investigemus, qui oritur ex mutatione anguli $ELC = \psi$, quippe cuius mutatio dabit quantitatem motus gyratorii. Cum igitur nulla alia vis adsit, praeter tensionem filii $BA = T$, cuius momentum respectu centri gravitatis C est $b T \sin. \omega$, quod tendit ad angulum ψ imminuendum, eius mutatio reperietur, si istud momentum diuidatur per

momentum inertiae corporis, $M k k$, vnde secundum principia motus oritur ista aequatio: $\frac{d}{\alpha} \frac{d \psi}{d t^2} = - \frac{b T \sin. \omega}{M k k}$. Hac igitur formula continetur determinatio motus gyratorii.

§. 9. Quodsi hanc aequationem multiplicemus per $d \psi$, orietur

$$\frac{d \psi d d \psi}{\alpha d t^2} = - \frac{b T d \psi \sin. \omega}{M k k}.$$

Supra autem vidimus esse

$$\frac{d x d d x + d y d d y}{\alpha d t^2} = \frac{b T d \psi \sin. \omega}{M}.$$

Quare cum nunc sit

$$\frac{k k d \psi d d \psi}{\alpha d t^2} = - \frac{b T d \psi \sin. \omega}{M}, \text{ hinc sequitur fore}$$

$$\frac{d x d d x + d y d d y + k k d \psi d d \psi}{\alpha d t^2} = 0,$$

cuius integrale est

$$\frac{d x^2 + d y^2 + k k d \psi^2}{2 \alpha d t^2} = \text{Const.}$$

quae aequatio, loco $d x^2 + d y^2$ substituto valore ante dato, induet hanc formam:

$$\frac{\alpha a d \phi^2 + (b b + k k) d \psi^2 + 2 a b d \phi d \psi \cos. \omega}{2 \alpha d t^2} = C.$$

§. 10. Evidens est hanc aequationem involvere vim viam, quae in corpore inest, cum $\frac{d x^2 + d y^2}{\alpha d t^2}$ exprimat quadratum celeritatis, qua centrum gravitatis corporis C promouetur, et $\frac{d \psi^2}{\alpha d t^2}$ exprimat quadratum celeritatis angularis; vnde patet, in corpore semper eandem quantitatem vis viae conservari, quae ergo semper manebit aequalis illi vi vivae, quae corpori initio fuerit impressa.

§. 11. Iam igitur affecuti sumus duas aequationes a tensione fili T liberatas, quarum prior, §. 6 inuenta, est

est differentialis secundi gradus; posteriorem vero modo inuentam ad primum gradum reducere licuit, atque hae duae aequationes totam problematis solutionem complectuntur, quae sunt:

$$I. a d d \Phi + b d d \Psi \cos. \omega - b d \Psi^2 \sin. \omega = 0$$

$$II. \frac{a a d \Phi^2 + (b b + k k) d \Psi^2 + 2 a b d \Phi d \Psi \cos. \omega}{d t^2} = f f.$$

His enim ad quoduis tempus t bini anguli Φ et Ψ determinari debent, namque praeter tempus t ambo tantum anguli Φ et Ψ in his aequationibus insunt, propter $\omega = \Psi - \Phi$.

§. 12. Nunc autem loco angulorum Φ et Ψ introducamus in calculum ipsas celeritates angulares, quibus corpus partim circa punctum fixum et partim circa proprium centrum grauitatis C gyratur, ponamusque celeritatem angularem circa punctum $A = \frac{d \Phi}{d t} = u$, et circa centrum grauitatis C celeritatem angularem $\frac{d \Psi}{d t} = v$, hocque modo posterior aequatio iam penitus ad quantitates finitas reducetur, quippe quae erit:

$$a a u u + (b b + k k) v v + 2 a b u v \cos. \omega = f f.$$

Pro priore vero aequatione, cum sit $d \Phi = u d t$ et $d \Psi = v d t$, ob $d t$ sumtum constans, erit $d d \Phi = d u d t$ et $d d \Psi = d v d t$. Quia vero est $d t = \frac{d \Phi}{u}$, itemque $d t = \frac{d \Psi}{v}$, eliminando tempusculum $d t$, erit

$$d d \Phi = \frac{d \Phi d u}{u} \text{ et } d d \Psi = \frac{d \Psi d v}{v},$$

hincque prior aequatio reducetur ad hanc formam:

$$\frac{a d \Phi d u}{u} + \frac{b d \Psi d v}{v} \cos. \omega - b d \Psi^2 \sin. \omega = 0.$$

§. 14. Quia autem haec aequatio praeter celeritates u et v adhuc elementa $d\Phi$ et $d\Psi$ continet, ea ex calculo expelli oportet. Cum ergo fit $d\Phi = u dt$ et $d\Psi = v dt$, erit $d\Psi - d\Phi = d\omega = (v - u) dt$, vnde fiet $dt = \frac{d\omega}{v - u}$, hincque $d\Phi = \frac{u d\omega}{v - u}$ et $d\Psi = \frac{v d\omega}{v - u}$, quibus valoribus substitutis erit aequatio postrema

$$a du + b dv \cos. \omega - \frac{b v v d\omega \sin. \omega}{v - u} = 0.$$

Sicque duas habemus aequationes inter ternas variables v , u , et ω ; vnde totum negotium eo redit, vt binae per tertiam definiantur. Quem in finem in eo est elaborandum, vt, vna harum trium quantitarum elisa, ad vnicam aequationem, binas tantum variables inuoluentem, solutio perducatur.

§. 15. Hic quidem primo videtur ex aequatione finita quaeri posse valorem $\cos. \omega$, qui cum suo differentiali in altera aequatione substitutus produceret aequationem differentialem inter binas celeritates u et v , quae autem tantopere erit perplexa, vt nihil plane inde concludi queat. Verum in alium modum incidi, ad duas tantum variables perueniendi, per aequationem multo simpliciore, quae autem nihilominus ita est comparata, vt omnia artificia analytica adhuc cognita frustra pro ea euoluenda in subsidium vocentur. Interim tamen haud inutile videtur, hanc ipsum operationem hic ob oculos exponere, quo clarius pateat, cuiusmodi incrementis Analysis adhuc indigeat.

§. 16. Hic primo statim ponatur $u = p v$ et aequatio iam erit:

$$(a a p p$$

$(a a p p + b b + k k + 2 a b p \cos. \omega) v v = f f,$
 quae, posito porro $b b + k k = b c$, fit simplicior, scil.

$$v v (a a p p + b c + 2 a b p \cos. \omega) = f f,$$

vbi notasse iuuabit, si corpus ex ipso puncto B suspende-
 retur, distantiam centri oscillationis ab hoc puncto futu-
 ram esse $= b + \frac{k k}{b} = c$. Praeterea vero faciamus
 $b \cos. \omega = z$, et aequatio nostra induet hanc formam:

$$v v (a a p p + b c + 2 a p z) = f f,$$

quae per logarithmos dat

$$2 l v + l (a a p p + b c + 2 a p z) = 2 l f,$$

vnde differentiando fit

$$\frac{d v}{v} = \frac{-a a p d p - a (p d z + z d p)}{a a p p + b c + 2 a p z}.$$

§. 17. Simili modo etiam in altera aequatione
 differentiali, posito $u = v p$ et $b \cos. \omega = z$, vt fiat $b d \omega$
 $\sin. \omega = -d z$, habebimus,

$$a (p d v + v d p) + 2 d v + \frac{v d z}{1-p} = 0,$$

quae per v diuisa praebet

$$\frac{d v}{v} = -\frac{a d p}{a p + z} - \frac{d z}{(1-p)(a p + z)}.$$

Hic iam loco $\frac{d v}{v}$ substituatur valor ante inuentus, orietur-
 que sequens aequatio inter binas variables p et z :

$$\frac{a d p}{a p + z} + \frac{d z}{(1-p)(a p + z)} = \frac{a a p d p + a (p d z + z d p)}{a a p p + b c + 2 a p z},$$

quae sublati fractionibus reducitur ad hanc:

$$a(1-p)(b c - z z) d p + (b c + a a p^2 + a p z (1+p)) d z = 0.$$

§. 18. Ecce ergo tota Problematis nostri Solutio perducta est ad hanc aequationem differentialem primi gradus, parum complicatam, inter binas variables p et z , unde si licuerit z per p modo finito definire, etiam quadratum vv per p definiretur, hincque porro altera celeritas $u = p v$; quam ob rem plurimum optandum esset ut Geometrae vires suas excercerent in ista aequatione resoluenda. Vbi notasse iuuabit, si vltimum membrum $p z (1 + p)$ abesset, totam aequationem nulla difficultate esse laboraturam, quia separationem variabilium sponte admitteret: foret enim $\frac{(1-p) dp}{b c + a a p^2} = \frac{dz}{b c - z z}$. Ante autem quam haec inuentio fuerit facta, ulterius progredi non licet.

Supplementum. continens Solutionem perfectam Problematis.

§. 19. Postquam praecedens scriptum absolueram, prorsus desperans de resolutione aequationis differentialis, ad quam sum perductus, nihilo tamen minus rem variis modis deinceps tentavi, et tandem per longas ambages contigit mihi eruere aequationem integram, atque adeo algebraicam, quam hic comunicaturus sum; ipsam autem Analysin, qua sum vsus, in aliam occasionem reseruare est visum,

§. 20. Perueneram autem ad hanc aequationem differentialem primi gradus:

$$a(1-p)(bc-zz)dp + bc + aap^2 + apz(1+p)dz = 0,$$

vbi

vbi ex praecedentibus elementis erat $p = \frac{u}{v}$, $z = b \cos \omega$
et $bc = b^2 + k^2$. Hanc aequationem porro, ponendo
 $z = as$ et $\frac{bb + kk}{aa} = nn$, ita ut fit $s = \frac{b}{a} \cos \omega$, ad hanc
formam simpliciore reduxi:

$dp(1-p)(nn-s^2) + ds(nn + p^2 + ps(1+p)) = 0$,
quippe quae, praeter binas variables p et s , unicam con-
stantem nn involvit, atque huius aequationis integrale
completum inueni esse

$$\frac{nn + ps + p + s}{\sqrt{nn + pp + 2ps}} = C.$$

§. 21. Quoniam autem Analyfin, quae me huc
perduxit, exponendam in aliud tempus refero, hic suffi-
ciet veritatem huius integralis demonstrare. Ostendam enim,
si haec formula differentietur, tum ipsam aequationem in-
tegrandam reuera resultare. Evidens autem est, differen-
tiale huius formulae fore fractionem, cuius denominator
est $(nn + pp + 2ps)^{\frac{3}{2}}$, per quam ergo si aequatio pro-
posita diuidatur, integrabilis euadat necesse est.

§. 22. Numerator istius differentialis duabus con-
stabit partibus, altera per dp altera per ds affecta; vtram-
que igitur seorsim inuestigemus. Ac prior quidem pars erit

$dp(s+1)(nn+pp+2ps) - dp(p+s)(nn+ps+p+s)$
quae reducitur ad hanc formam: $dp(1-p)(nn-s^2)$, quae
est ipsa pars prior aequationis propositae. Simili modo
reperitur altera pars

$$= ds(p+1)(nn+pp+2ps) - pds(nn+ps+p+s),$$

quae

quae reducitur ad $ds(nn + p^2 + ps(1 + p))$, id quod cum membro secundo aequationis propositae conuenit.

§. 23. Ex hac igitur aequatione integrali definiri poterit s per p , cuius valor ita se habet:

$$s = \frac{ccp - (p+1)(p+nn) + c\sqrt{ccpp + (pp-1)(pp-nn)}}{(p+1)^2};$$

vnde, ob $s = \frac{b \cos. \omega}{a}$, angulus ω per variabilem p exprimitur. Deinde vero aequatio integralis primum inuenta

$$ff = (aapp + bc + 2abp \cos. \omega)vv,$$

ob $\frac{b}{a} = nn$, dabit $vv = \frac{ff}{aa\{nn + pp + 2ps\}}$, ideoque etiam v per p definitur, cum fit $v = \frac{fp}{a\sqrt{(nn + pp + 2ps)}}$, vnde ob positum $u = pv$ erit etiam $u = \frac{fp}{a\sqrt{(nn + pp + 2ps)}}$. Hinc porro etiam ipsi anguli ψ et ϕ per has formulas integrandas inuestigantur: $\phi = \int \frac{u d\omega}{v-u}$ et $\psi = \int \frac{v d\omega}{v-u}$, ac denique, cum fit $\frac{d\phi}{u} = dt$, vel etiam $\frac{d\psi}{v} = dt$, ipsum quoque tempus t per eandem variabilem p determinabitur. Erit enim $t = \int \frac{d\omega}{v-u}$, sicque omnia sunt determinata quae ad perfectam Problematis solutionem spectant.

§. 24. Praeterea vero etiam notasse iuuabit interternas variables v , u et ω duas aequationes algebraicas dari posse; si enim in integrali aequatione inuenta loco p scribatur $\frac{u}{v}$, ob $\sqrt{(nn + pp + 2ps)} = \frac{f}{av}$ et $s = \frac{b \cos. \omega}{a}$, erit illa aequatio

$$Cf = b \cos. \omega (v + u) + a(u + nnv).$$

Ante autem iam inueneramus esse

$$\frac{ff}{aa} = nnvv + uu + \frac{2b}{a}uv \cos. \omega.$$

§. 25.

§. 25. Initio vero iam inueneramus aequationem differentialem inter easdem ternas variables v, u, ω , quae erat: $a du + b dv \cos. \omega = \frac{b v u d \cos. \omega}{v - u}$. Haec ergo cum binis praecedentibus integralibus convenire debet, quae, si constantes per integrationem ingressas paulisper mutemus, ponendo $\frac{f}{a} = g$ et $\frac{f^c}{a} = h$, erunt:

$$g g = u u + n n v v + \frac{b u v}{a} \cos. \omega$$

$$h = \frac{b \cos. \omega}{a} (v + u) + u + n n v,$$

atque hanc convenientiam contemplantri haud difficile erit viam multo planiorem inuenire, quae ad eandem integrationem, tanto labore erutam, perducatur.

